

# ERRATA

à la quatrième édition

*Cet errata est maintenu aussi complet que possible. Il inclut donc aussi bien des modifications importantes (référéncées en gras) que des remarques triviales.*

*Je remercie tous ceux qui m'ont déjà fait part de leurs remarques et corrections, et en particulier Jean-Julien Fleck, Céline Chevalier, Loïc Melscoet et les professeurs François Thirioux, Jean Cousteix, Andreas de Vries, Luis Rivera et Emmanuel Kowalski.*

**Page 15** — , paragraphe 1.2.d : l'espace  $E$  doit être complet pour que le théorème de double limite des suites s'applique.

**Page 71** — **ligne -6** : La sommation commence à  $n = 1$  :

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Page 72** — **ligne -7** : Le jacobien vaut plutôt  $J = r^2 \cos \theta$ .

**Page 73** — **ligne 3** : Il manque un facteur  $t$  dans le second membre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} dt.$$

**Page 88** — **ligne 3** : Le premier membre de l'équation est

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)$$

De même à la troisième équation centrée.

**Page 94** — Exercice 4.8, prendre  $\mathcal{T}_3 = [2 + 6i; 6i]$ .

Des lecteurs m'ayant demandé un corrigé de cet exercice, le voici :

On effectue le changement de variable  $z = it_1$  pour  $t_1 \in [-1; 6]$ , ce qui donne  $dz = i dt_1$  et

$$\int_{\mathcal{T}_1} f(z) dz = i \int_{-1}^6 (-3it_1) dt_1 = 3 \left[ \frac{t_1^2}{2} \right]_{-1}^6 = \frac{105}{2}.$$

De même, on cherche un chemin affine pour  $\mathcal{T}_2$ , par exemple

$$z = -i + (2 + 7i)t_2 \quad t_2 \in [0; 1]$$

ce qui donne

$$\int_{\mathcal{T}_2} f(z) dz = \frac{331}{6} - \frac{17}{3}i.$$

Avec les mêmes techniques,

$$\int_{\mathcal{T}_3} f(z) dz = \frac{8}{3} - 36i.$$

Si l'on effectue la somme de ces trois valeurs (on intègre  $f$  sur chemin fermé  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3 \dots$ ), on ne trouve pas une valeur nulle ! C'est dû au fait que  $f$  n'est pas holomorphe (les relations de Cauchy ne sont pas vérifiées), et donc que le théorème de Cauchy ne s'applique pas.

**Page 110 — ligne 11 :** ... nous est donc donnée par l'intégrale de  $\pi f(z) \cotan \pi z$  sur le contour suivant...

**ligne -2 :** À la limite où  $N$  tend vers l'infini, et si la série  $\sum f(n)$  converge,...

**Page 112 —** Il manque des facteurs dans le dernier calcul. Lire :

... ce qui donne

$$T' = -\pi \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^4 \sin(\pi z)} ; z = 0 \right),$$

le signe « moins » étant dû au fait que le dernier chemin est parcouru dans le sens rétrograde. Il ne reste plus qu'à évaluer ce résidu, en utilisant par exemple un développement limité de  $1/\sin(\pi z)$  :

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \frac{\pi^5 z^5}{120} + \dots \\ \frac{1}{z^4 \sin(\pi z)} &= \frac{1}{\pi z^5} \left( 1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \frac{\pi^4 z^4}{120} + \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\pi z^5} \left( 1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + \frac{14 \pi^4 z^4}{720} + \dots \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que le résidu de  $1/z^4 \sin(\pi z)$  en 0 est  $14 \pi^3/720$  et donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{-7 \pi^4}{720}.$$

**Page 130 — ligne 2 :** On dit que  $f$  a un pôle à l'infini si  $z \mapsto F(z)/z^2$  admet un pôle en 0.

**Page 133 — ligne -1 :** dans l'intégrale, lire  $e^{-t^2/2}$  et non  $e^{-t^2}$ .

**Page 164 —** La définition de  $D_n$  comporte une erreur de normalisation :

$$D_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 6n^3/\pi & \text{si } \|\mathbf{r}\| < 1/2n \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{r}\| > 1/2n, \end{cases}$$

**Page 188 —** La dernière ligne de la démonstration du théorème 8.55 est

$$\langle \sigma_n^{(1)} \delta_{\mathcal{S}}, \varphi \rangle = - \iint_{\mathcal{S}} \varphi D_n f \, d^2 s, \quad \langle \{\Delta f\}, \varphi \rangle = \iiint_{\mathcal{V}} \varphi \Delta f \, d^3 v.$$

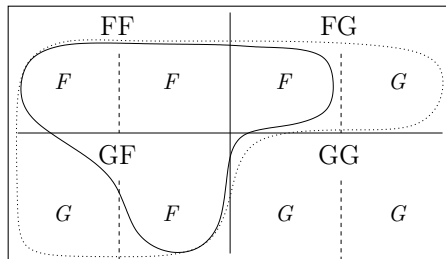
La dernière ligne est :

$$\langle \Delta f_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} D_n \varphi \, d^2 s + \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \right) \varphi(\mathbf{r}) \, d^2 s.$$

**Page 189 — ligne 3 :** Lire :

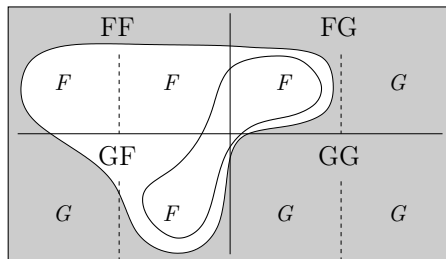
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \right) \varphi(\mathbf{r}) \, d^2 s = -4\pi \varphi(\mathbf{0})$$

**Page 199 —** Voici de plus belles figures (issues de la 5e édition)



Chacune des quatre grandes cases est équiprobables (sexe des enfants, dans l'ordre de naissance), et est séparée en deux cases équiprobables (choix de la photographie). L'événement  $A$  est entouré en trait plein (la photo fait apparaître une fille) tandis que l'événement  $A'$  est entouré de pointillés (Madame Durand a au moins une fille parmi ses deux enfants).

L'événement « Assia a un frère », conditionné par l'événement  $A$ , est de probabilité  $1/2$  :



En revanche, l'événement « Assia a un frère », conditionné par l'événement  $A'$ , est de probabilité  $1/3$  :

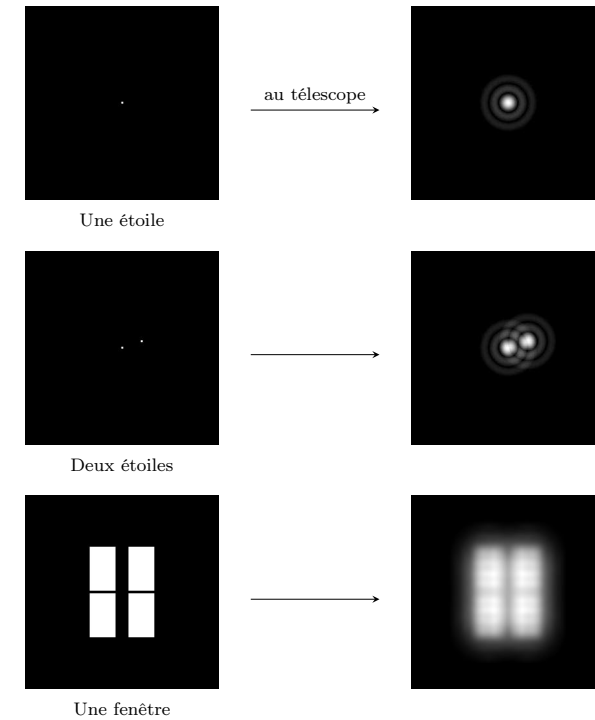
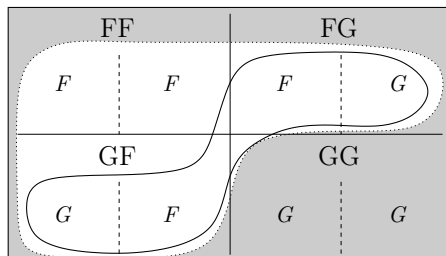


FIGURE 0.1 — Quelques objets vus au télescope. En l'absence de toute turbulence, la figure de diffraction formée par une étoile est la réponse impulsionnelle du système optique. La taille de cette figure de diffraction donne la limite inférieure du pouvoir de résolution de l'appareil optique. (Ici, la luminosité des anneaux a été fortement exagérée pour la lisibilité de la figure. De plus, les images sont entièrement « théoriques », l'effet de la convolution étant entièrement calculé à l'ordinateur.)

**Page 217** — Le noyau de la chaleur est

$$G(x, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\mu\pi ct}} e^{-cx^2/4\mu t}.$$

**Page 238** — Dans tout le paragraphe sur les séries de Fourier, il me semble finalement plus pratique (et plus usuel) de prendre les notations suivantes pour l'espace  $L^2[0; T]$ .

On définit la famille de fonctions  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  par

$$e_n(t) = e^{2i\pi nt/T}$$

et, pour que la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  soit orthonormée, on définit le produit scalaire et la norme par

$$(f|g) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt \quad \text{et} \quad \|f\|^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

Les coefficients de Fourier sont toujours définis par un produit scalaire, c'est-à-dire

$$c_n(f) = (e_n | f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi nt/T} dt$$

et

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt.$$

La formule de Parseval est, en termes de norme et produit scalaire, inchangée :  $\|f\| = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ , ou encore

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Dans le cas d'application du théorème de Dirichlet, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi nt/T} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right).$$

**Page 249** — Solution de l'exercice 10.6 : remplacer par

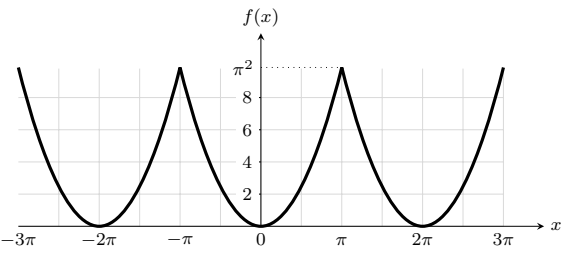
Les coefficients de Fourier de  $f$  sont

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{(-1)^n}{n^2},$$

donc la série de Fourier de  $f$  est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4(-1)^p}{n^2} \cos nx,$$

qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$  — ce qui était attendu car  $f$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux :



La formule de Parseval donne

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} + \frac{\pi^4}{9} \quad \text{et donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Page 288** — La figure 12.3 est fautive, ainsi que le commentaire, repris plus bas dans le texte, sur le nombre pair de fentes.

**Page 379** — Dernière formule, lire

$$G_{(1)}(x, t) = \begin{cases} c/2 & \text{si } |x| < ct \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Page 389** — **ligne 8** : lire « ... et  $G^{(av)}$  en dehors du cône de lumière passé ».

**Page 396** — Juste au dessus de la proposition 17.17, dans la première égalité, lire

$$\varphi'^{\mu}_{\nu} = \langle \alpha'^{\mu}, \Phi(\mathbf{e}'_{\nu}) \rangle \dots$$

et non

$$\varphi'^{\mu}_{\nu} = \langle \alpha'^{\mu}, \Phi(\mathbf{e}'_{\mu}) \rangle \dots$$

**Page 424** — **ligne -9** : à partir de « À titre d'exemple », remplacer par :

Explicitons le cas où l'espace ambiant est  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\omega^2$  une 2-forme, notée

$$\omega^2 = f_x dy \wedge dz + f_y dz \wedge dx + f_z dx \wedge dy.$$

(Notez que l'on a changé les conventions et que l'on a pris  $dz \wedge dx$  et non  $dx \wedge dz$ ; cela change simplement la définition du signe de  $f_y$ .) Soit  $\mathcal{S}$  une surface orientée; une telle surface peut être paramétrée par une fonction vectorielle, ou trois fonctions scalaires, de deux variables

$$(u, v) \in \Omega \longmapsto \boldsymbol{\sigma}(u, v) \stackrel{\text{déf.}}{=} (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

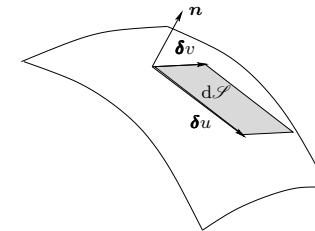
Supposons que ce paramétrage soit **régulier**, c'est-à-dire qu'en chaque point les deux vecteurs

$$\boldsymbol{\delta}u \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\delta}v \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

forment une famille libre. On définit alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \omega^2 &\stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\Omega} [f_x dy \wedge dz(\boldsymbol{\delta}u, \boldsymbol{\delta}v) + f_y dz \wedge dx(\boldsymbol{\delta}u, \boldsymbol{\delta}v) + f_z dx \wedge dy(\boldsymbol{\delta}u, \boldsymbol{\delta}v)] du dv \\ &= \int_{\Omega} f_x [\delta u_y \delta v_z - \delta u_z \delta v_y] du dv + \text{PC} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot [\boldsymbol{\delta}u \wedge \boldsymbol{\delta}v] du dv = \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{S} \end{aligned}$$

où « PC » désigne les deux autres termes obtenus par permutation circulaire des indices. La dernière relation provient de ce que  $\boldsymbol{\delta}u \wedge \boldsymbol{\delta}v = \mathbf{n} d\mathcal{S}$ , où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface (orientée par le choix des coordonnées), et  $d\mathcal{S}$  l'élément d'intégration de surface :



La première intégrale concerne la *forme différentielle*  $\omega$ , tandis que l'intégrale finale est une *intégrale de fonction*.

**Page 467** — **ligne -2** : Lire  $A' = \{\text{FFF}, \text{FGF}, \text{GFF}\}$ . De plus, on peut éclairer les événements A et A' par le schéma ci-dessous :